

Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性及其应用*

梁学斌 吴立德

(复旦大学计算机科学系, 上海 200433)

摘要 若 Hopfield 型连续反馈神经网络连接权阵的矩阵测度小于神经元的电阻常数与增益参数的最大乘积的倒数, 则对于任意的网络外部输入, 该网络系统都是全局指数稳定的. 该倒数就是保证此结论成立的矩阵测度的最大可能上界, 上述结论部分回答了 Vidyasagar 提出的关于 Hopfield 型神经网络的一个公开问题: 具有“几乎对称”连接权阵的神经网络是否会出现极限环? 揭示了网络时间常数与全局指数收敛收敛速度之间的内在关系. 最后说明了分析结果在最优化计算中的应用.

关键词 神经网络 全局指数稳定性 网络时间常数 最优化计算

由于连续动态反馈神经网络的定性性质对于具体的综合过程具有启发和指导作用, 其严格分析已显得非常重要. 有代表性的一些分析结果可见文献[1 ~ 10].

Hopfield 型连续神经网络的两个主要应用是联想记忆和最优化计算. 根据其不同的应用, 需要作不同类型的稳定性分析. 对于联想记忆神经网络, 它应具有多个分别对应于要存储的记忆模式的平衡点, 因此定性分析的目的在于何种条件下, 这些平衡点是局部渐近稳定的. 对于最优化计算神经网络, 理想情形是有且只有一个全局渐近稳定的平衡点^[1]. 此时, 定性分析的目的在于何种条件下, 网络具有全局渐近稳定性. 因此, 神经网络的稳定性分析所关心的问题类型依赖于其具体应用. 但是, 这些不同应用的一个共同要求是提高网络趋于平衡状态的收敛速度, 从而降低神经计算所需的时间. 一个重要的设计目标是网络具有任意指定的趋于平衡状态的指数收敛速度^[11, 12], 即具有任意指定阶的指数稳定性^[13]. 对应于此设计要求, 最优化计算神经网络稳定性分析的目的则是在何种条件下, 网络具有全局指数稳定性, 并分析指数收敛速度依赖于何种网络参数. 这正是本文的主要任务. 本文的分析结果推广了现有的全局渐近稳定性结果. 文中也说明了如何应用所得的分析结果来设计具有任意全局指数稳定阶的最优化计算神经网络.

1 关于全局渐近稳定性的已有结果

考虑如下 Hopfield 型连续动态反馈神经网络模型:

1994-05-16 收稿, 1994-11-20 收修改稿

* 国家攀登计划和国家自然科学基金资助项目

$$C_i du_i/dt = \sum_{j=1}^n T_{ij} v_j - u_i/R_i + I_i, \quad v_i = g_i(u_i), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

这里, 不假定 $T=(T_{ij})_{n \times n}$ 对称和所有 $g_i(\cdot)$ 都相同^[2]. $C_i > 0$, $R_i > 0$ 和 I_i 分别称为第 i 个神经元的电容常数、电阻常数和网络外部输入.

假定输入输出函数 $g_i(z)$ ($z \in \mathbb{R}^1$) 满足: (1) $g_i(z)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上连续可微; (2) $g'_i(z) > 0$; (3) $g_i(z)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上有界. 常用的 Sigmoid 函数, 如 $1/[1 + \exp(-z)]$, 均满足 (1) ~ (3). 易知, $0 < M_i = \sup_z g'_i(z) < +\infty$, 称 M_i 为第 i 个神经元的增益参数. 在应用中, z 可能为 λz ($\lambda > 0$ 为参数) 的形式, 此时 $\sup_z dg_i(\lambda z)/dz = \lambda \sup_z g'_i(z) = \lambda M_i$, 即增益参数放大 λ 倍.

现有文献关于系统 (1) 全局渐近稳定性的充分条件大都可表为关于连接权阵的矩阵范数或矩阵测度的形式. 文后用到的矩阵范数和测度的定义及性质可见文献[14]. 为便于各结果的比较, 且不影响各结论的实质, 假设 $R_i = M_i = 1$, $i=1, 2, \dots, n$. 文献[15, 3, 8, 16, 17, 6~8] 分别得到下述全局渐近稳定性充分条件:

$$\|T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |T_{ij}| < 1, \quad (2)$$

$$\mu_\infty(T) = \max_{1 \leq i \leq n} (T_{ii} + \sum_{j \neq i} |T_{ij}|) < 1, \quad (3)$$

$$\mu_1(T) = \max_{1 \leq j \leq n} (T_{jj} + \sum_{i \neq j} |T_{ij}|) < 1, \quad (4)$$

$$\|T\|_m = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij}^2 \right]^{1/2} < 1, \quad (5)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left[T_{ii} + (1/2) \sum_{j \neq i} (|T_{ij}| + |T_{ji}|) \right] < 1, \quad (6)$$

$$\|T\|_2 = \sup_x |T_x|_2 / |x|_2 = [\lambda_{\max}(T^t T)]^{1/2} < 1, \quad (7)$$

$$\mu_2(T) = \lambda_{\max}[(T + T^t)/2] < 1. \quad (8)$$

文献[10]得到充分条件 $\mu_p(T) \leq 0$, $p \in \{1, 2, \infty\}$, 它们分别比条件 (4), (8) 和 (3) 要强. 而且, 文献[10]为得到全局渐近稳定性所加的条件实际上是可以去掉的. 易见, 全局稳定性条件 (3), (4) 和 (8) 相对最弱, 它们之间是互不包含的.

上述结果均没有分析模型 (1) 的全局指数稳定性和指数收敛速度. 由本文开始的讨论可知, 这是神经网络定性分析和应用中的一个重要问题.

2 全局指数稳定性的主要结果及有关讨论

设 $h = 1/\max_{1 \leq i \leq n} (R_i M_i) > 0$, 即 h 是神经元的电阻常数与增益参数的最大乘积的倒数. 当 $R_i = M_i = 1$ ($i=1, 2, \dots, n$) 时, $h=1$. 本文的主要结果之一是

定理 1 若 $\mu_p(T) < h$, $p \in \{1, 2, \infty\}$. 则对于任意的网络外部输入 I_i ($i=1, 2, \dots, n$), 网络系统 (1) 都是全局指数稳定的.

为行文紧凑, 将定理 1 的证明放于下一节, 并估计相应的全局指数收敛速度. 定理 1 的结果推广了第 1 节中提及的所有全局渐近稳定性结果.

下面将说明, h 是保证定理 1 结论成立的矩阵测度 $\mu_p(T)$ 的最大可能上界. 在这个意义上, 定理 1 的充分条件是“最弱”的, 即不可能将它进一步减弱为 $\mu_p(T) < h + \varepsilon (\varepsilon > 0$ 为任意常数) 甚至 $\mu_p(T) \leq h$ 的形式. 这只需通过一个简单例子来说明.

取 $n=1$, $C_1=R_1=1$, $g_1(z)=(2/\pi)\arctan(\pi z/2)$, 则模型 (1) 成为

$$du_1/dt = T_{11}g_1(u_1) - u_1 + I_1, \quad (9)$$

此时, $\mu_p(T) = T_{11} (p \in \{1, 2, \infty\})$, $h=1$.

若 $\mu_p(T) < h$, 则由定理 1 知, 对于任意的 $I_1 \in \mathbb{R}^1$, 系统 (9) 均是全局指数稳定的. 若 $\mu_p(T) > h$, 可取 $I_1=0$, 则易知 (9) 此时刚好有三个平衡点, 故定理 1 的结论不成立, 但 (9) 式仍是全局稳定的, 即所有运动轨道必趋于系统的平衡点集. 若 $\mu_p(T)=h$, 可取 $I_1=0$, 则 (9) 式有且只有一个平衡点 $u_1=0$. 将系统 (9) 看成 Hopfield 网络的 $n=1$ 特例, 即知 $u_1=0$ 是 (9) 式的全局渐近稳定的平衡点. 但 $u_1=0$ 却不是全局指数稳定的. 这是因为, 系统 (9) 在 $u_1=0$ 是指数渐近稳定的当且仅当 (9) 式在 $u_1=0$ 处的线性近似系统 $du_1/dt=0$ 具有全局指数稳定性^[14]. 显然, 后者并不具有.

定理 1 的结果部分回答了文献 [9] 中提出的一个公开问题.

Hopfield 神经网络 (T 对称) 是全局稳定的, 即其平衡点集是一个全局吸引子. 严格证明此结论的途径^[18, 19]是先构造“能量函数” $E(v) = \sum_{i=1}^n \left[(-1/2) \sum_{j=1}^n T_{ij} v_i v_j + \int_0^{v_i} g_i^{-1}(z) dz / R_i - I_i v_i \right]$.

因 T 对称, 故有

$$C_i du_i/dt = -\partial E(v)/\partial v_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

但是, 只要有一对 (i, j) 成立 $T_{ij} \neq T_{ji}$, 不管 $|T_{ij} - T_{ji}|$ 有多小, 等式 (10) 就不再成立. 从本质上讲, 文献 [18] 和 [19] 关于全局稳定性的证明是以等式 (10) 成立为前提的. 因此, Hopfield 神经网络的权参数即使有任意微小的摄动, 只要权阵不再对称, 则由上述“能量方法”无法知道整个网络系统是否仍然保持全局稳定或全局指数稳定; 另一方面, 从 Hopfield 神经网络的硬件实现来看, 要保证两个物理参数, 例如电阻值完全相等且不允许有任意微小的差异是几乎不现实的. 文献 [9] 基于此事实提出如下公开问题^[9]: 具有“几乎对称”连接权阵的神经网络是否会出现极限环 (从而不再全局稳定)? 定理 1 的结论表明, 若对称连接权阵 T 满足适当条件, 则具有“几乎对称”连接权阵 $T' = T + \delta T$ 的神经网络仍为全局指数稳定, 故不会出现极限环, 其中 δT 表示关于 T 的微小摄动矩阵. 即是说, 若 $\mu_p(T) < h (p \in \{1, 2, \infty\})$, 只要摄动 δT 充分小 (可用矩阵范数 $\|\cdot\|_p$ 来度量), 使得 $\mu_p(T + \delta T) < h$ 仍成立, 则网络仍保持全局指数稳定. 值得注意的是, 该结论不仅对于对称神经网络成立, 它对于任意网络也成立, 即不依赖于权阵的特殊结构. 特别地, 定理 1 结论对于连接权阵为反对称阵、半负定对称阵、主对角元全不大于零的行或列对角占优阵等情形都成立.

推论 1 若

$$\mu_1[(T+T')/2] = \max_{1 \leq i \leq n} \left[T_{ii} + (1/2) \sum_{j \neq i} |T_{ij} + T_{ji}| \right] < h$$

或

$$\|(T+T')/2\|_{\infty} = (1/2) \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (T_{ij} + T_{ji})^2 \right]^{1/2} < h,$$

则定理 1 结论成立.

上述两充分条件与 $\mu_1(T) < h$ 和 $\mu_\infty(T) < h$ 之间是互不包含的.

设 $u = (u_1, \dots, u_n)'$, $u' = (u'_1, \dots, u'_n)'$, $P = \text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_n) > 0$, $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) > 0$, 并设 $u' = Pu$, 则系统 (1) 可化为关于 u' 的等价系统:

$$C_i du'_i / dt = \sum_{j=1}^n (P_i T_{ij} Q_j) [Q_j^{-1} g_j(P_j^{-1} u'_j)] - u'_i / R_i + P_i I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

再利用定理 1 和推论 1, 就得

定理 2 设 $h' = 1 / \max_{1 \leq i \leq n} [(R_i M_i) / (P_i Q_i)] > 0$. 若 $\mu_p(PTQ) < h'$, $p \in \{1, 2, \infty\}$, 则定理 1 结论成立.

推论 2 若 $\mu_1(PTQ + QT'P) < 2h'$ 或 $\|PTQ + QT'P\|_m < 2h'$, 则定理 2 结论成立.

3 全局指数收敛速度的估计

定义 1^[4] 设有微分方程组 $dx(t)/dt = f(t, x(t))$, $t \geq 0$, 其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 且 $f: [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 全局 Lipschitz 连续. 设 $s(t, t_0, x_0)$ ($t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$) 是对应于初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解. 设 $f(t, 0) = 0$ ($t \geq 0$). 若存在常数 $a, b > 0$, 使得 $\|s(t_0 + t, t_0, x_0)\| \leq a \|x_0\| \exp(-bt)$ ($t \geq 0$), 则称平衡点 $x = 0$ 是全局指数稳定的, b 为系统的全局指数收敛速度或全局指数稳定的阶.

由于系统 (1) 是自治系统, 以下只考虑系统 (1) 的初始时刻 $t_0 = 0$ 且初始条件为 $u(0; u_0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$ 的运动轨道 $u(t; u_0)$.

引理 1^[8] 系统 (1) 的平衡点集是一个非空集合.

设 $m_i = \sup_z |g_i(z)| < +\infty$, $V(u) = \sum_{i=1}^n C_i R_i u_i^2$, $B(0; r) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid V(u) \leq r\}$ ($r > 0$),

$$\theta = \sum_{i=1}^n R_i^2 \left[\sum_{j=1}^n |T_{ij}| m_j + |I_i| \right]^2.$$

引理 2 系统 (1) 的平衡点集是一个包含于正向不变子集 $B(0; \tau\theta)$ 内的有界闭集, 其中 $\tau = \max_{1 \leq i \leq n} (R_i C_i) > 0$ 称为神经网络的时间常数.

证 沿系统 (1) 的轨道 $u(t; u_0)$ 对 $V(u)$ 求导, 可得

$$dV(u)/dt = 2 \sum_{i=1}^n C_i R_i u_i du_i/dt = 2 \sum_{i=1}^n u_i \left[\sum_{j=1}^n R_i T_{ij} g_j(u_j) - u_i + R_i I_i \right]$$

$$\leq 2[-\|u\|^2 + \|u\|\theta^{1/2}] = -2\|u\|[\|u\| - \theta^{1/2}].$$

因此, 对任何 $a \in (0, 1)$, 令 $b = 1 - a^{1/2} \in (0, 1)$, 则有

$$dV(u)/dt \leq -2b\|u\|^2 \leq -(2b/\tau)V(u), \quad \forall u \notin B(0; \tau\theta/a). \quad (11)$$

对任何 $u_0 \notin B(0; \tau\theta/a)$, 由不等式 (11) 可知, $u(t; u_0)$ 必在时刻 $t^*(u_0, a) = \inf\{t > 0 \mid u(t; u_0) \in B(0; \tau\theta/a)\}$ 进入并将永远不会离开椭球体 $B(0; \tau\theta/a)$.

下面证明 $t^*(u_0, a)$ 一定是有限时刻.

设 $p = p(t; p_0)$ 是 (11) 式的比较系统 $dp/dt = -(2b/\tau)p$ 在初始条件 $p_0 = p(0; p_0) = V(u_0)$ ($u_0 \notin B(0; \tau\theta/a)$) 下的解. 易知, $p(t; p_0) = p_0 \exp(-2bt/\tau)$. 从而由不等式 (11) 和比较原理^[20], 可得 $V(u(t; u_0)) \leq V(u_0) \exp(-2bt/\tau)$ ($t \in [0, t^*(u_0, a)]$, $u_0 \notin B(0; \tau\theta/a)$). 通过解方程 $V(u_0) \exp(-2bt/\tau) = \tau\theta/a$, 即得

$$t^*(u_0, a) \leq [\tau/(2b)] \ln[aV(u_0)/(\tau \theta)] < +\infty.$$

因此, 对任何 $a \in (0, 1)$, 系统 (1) 的平衡点集是包含于椭球体 $B(0; \tau \theta/a)$ 内的一个有界闭集, 且由不等式 (11) 可知 $B(0; \tau \theta/a)$ 是一个正向不变子集, 即 $u(t; u_0) \in B(0; \tau \theta/a) (t \geq 0, u_0 \in B(0; \tau \theta/a))$. 令 $a \rightarrow 1^-$, 就可得到引理 2 的证明. 证毕.

引理 1 和 2 分别表明了系统 (1) 平衡点的存在性和空间位置.

定理 3 若 $\mu_1(T) < h$, 则对于任意的网络外部输入 $I_i (i=1, 2, \dots, n)$, 系统 (1) 存在唯一的平衡点 u^* , 且系统运动轨道 $u(t; u_0)$ 满足

$$\|u(t; u_0) - u^*\| \leq (C_{\max}/C_{\min}) n^{1/2} \|u_0 - u^*\| \exp(-\eta_1 t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

其中 $C_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} C_i$, $C_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} C_i$, $\eta_1 = \min_{1 \leq i \leq n} [1 - R_i M_i \mu_1(T)^+] > 0$, $\mu_1(T)^+ = \max(0, \mu_1(T))$.

证 设系统 (1) 的平衡态为 $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)^t$, $x = (x_1, \dots, x_n)^t = u - u^*$, 则有

$$C_i dx_i/dt = \sum_{j=1}^n T_{ij} f_j(x_j) - x_i/R_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

其中 $f_i(x_i) = g_i(x_i + u_i^*) - g_i(u_i^*)$. 易知 $|f_i(z)| \leq M_i |z|$, 且 $z f_i(z) \geq 0 (z \in \mathbb{R}^1)$. 只需证原点 $x=0$ 是系统 (13) 的全局指数稳定的平衡点, 并估计全局指数稳定的阶.

作 Lyapunov 函数 $V_1(x) = \sum_{i=1}^n C_i |x_i| (x \in \mathbb{R}^n)$, 并定义 $V_1(x)$ 沿系统 (13) 的运动轨道 $x(t; x_0)$ 的

上右 Dini 导数为

$$D^+ V_1(x(t)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup [V_1(x(t+h)) - V_1(x(t))]/h.$$

定义函数 $\sigma(z_1, z_2): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\sigma(z_1, z_2) = \begin{cases} 1, & \text{若 } z_1 > 0 \text{ 或 } z_1 = 0 \text{ 且 } z_2 > 0, \\ 0, & \text{若 } z_1 = z_2 = 0, \\ -1, & \text{若 } z_1 < 0 \text{ 或 } z_1 = 0 \text{ 且 } z_2 < 0. \end{cases}$$

设 $x(t; x_0)$ 是系统 (13) 在初始条件 $x(0; x_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ 下的解, 则对 $V_1(x)$ 求得

$$\begin{aligned} D^+ V_1(x) &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n T_{ij} f_j(x_j) - x_i/R_i \right] \sigma(x_i, dx_i/dt) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n T_{ij} \sigma(x_i, dx_i/dt) \right] f_j(x_j) - \sum_{j=1}^n |x_j|/R_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left[T_{jj} + \sum_{i \neq j} T_{ij} \sigma(x_i, dx_i/dt) \sigma(x_j, dx_j/dt) \right] |f_j(x_j)| - \sum_{j=1}^n |x_j|/R_j \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left[T_{jj} + \sum_{i \neq j} |T_{ij}| \right] |f_j(x_j)| - \sum_{j=1}^n |x_j|/R_j \\ &\leq \mu_1(T)^+ \sum_{j=1}^n |f_j(x_j)| - \sum_{j=1}^n C_j |x_j|/R_j \leq -(\eta_1/\tau) V_1(x). \end{aligned} \quad (14)$$

类似于引理 2 的证明, 由不等式 (14), 并利用比较原理^[20], 可得

$$V_1(x(t; x_0)) \leq V_1(x_0) \exp(-\eta_1 t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

注意到 $C_{\min} \|x\| \leq V_1(x) \leq C_{\max} n^{1/2} \|x\| (x \in \mathbb{R}^n)$, 则由上述不等式可得

$$\|x(t; x_0)\| \leq (C_{\max}/C_{\min})n^{1/2}\|x_0\|\exp(-\eta_1 t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

设 $x_0 = u_0 - u^*$, 则有 $x(t; x_0) = u(t; u_0) - u^*$, 从而就得到不等式 (12). 证毕.

定理 4 若 $\mu_\infty(T) < h$, 则对于任意的网络外部输入 $I_i (i=1, 2, \dots, n)$, 系统 (1) 存在唯一的平衡点 u^* , 且存在与电容常数 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 无关的常数 $\alpha \geq 1, \beta > 0$, 使得系统运动轨道 $u(t; u_0)$ 满足

$$\|u(t; u_0) - u^*\| \leq \alpha n^{1/2} \|u_0 - u^*\| \exp(-\beta t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (15)$$

证 作函数 $V_2(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_k|, k = k(x) \in \{1, 2, \dots, n\}$. 求导, 得

$$D^+ V_2(x) = \left[\sum_{j=1}^n T_{kj} f_j(x_j) - x_k / R_k \right] \sigma(x_k, dx_k/dt) / C_k \leq [2m \|T\|_\infty R_{\max} - |x_k|] / (R_k C_k),$$

其中 $m = \max_{1 \leq i \leq n} \sup |g_i(z)| < +\infty, R_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} R_i$, 不等号利用了 $|f_j(x_j)| \leq 2m, j=1, 2, \dots, n$.

设 $\delta = 2m \|T\|_\infty R_{\max} > 0$, 任取 $a \in (0, 1)$, 设 $B_{\delta, a} = \{x \in \mathbb{R}^n | V_2(x) \leq \delta / (1-a)\}$, 则得

$$D^+ V_2(x) \leq -(a/\tau) V_2(x), \quad \forall x \notin B_{\delta, a}. \quad (16)$$

类似引理 2 可证, 对任意 $x_0 \notin B_{\delta, a}, x(t; x_0)$ 在有限时刻

$$t^*(x_0, a) = \inf\{t > 0 | x(t; x_0) \in B_{\delta, a}\} \leq (\tau/a) \ln[(1-a)|x_0|_\infty / \delta] < +\infty$$

进入并将永远离开正向不变子集 $B_{\delta, a}$. 由不等式 (16) 和比较原理可得

$$\|x(t; x_0)\|_\infty \leq |x_0|_\infty \exp(-at/\tau), \quad \forall t \in [0, t^*(x_0, a)], \quad \forall x_0 \notin B_{\delta, a}. \quad (17)$$

作函数 $V_3(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x_i)| = |f_k(x_k)|, k = k(x) \in \{1, 2, \dots, n\}$. 对上述 $a \in (0, 1)$, 令 $\Omega_{\delta, a} = \{x \in \mathbb{R}^n | V_3(x) \leq M\delta / (1-a)\}$. 易见 $B_{\delta, a} \subset \Omega_{\delta, a}$.

设 $x(t; t_0, x_0) (t \geq t_0 \geq 0)$ 是系统 (13) 在初始条件 $x(t_0; t_0, x_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ 下的解, 则沿轨道 $x(t; t_0, x_0)$ 对 $V_3(x)$ 求 Dini 导数, 可得

$$\begin{aligned} D^+ V_3(x) &= \left[\sum_{j=1}^n T_{kj} f_j(x_j) - x_k / R_k \right] f'_k(x_k) \sigma(x_k, dx_k/dt) / C_k \\ &= \left[\sum_{j=1}^n T_{kj} f_j(x_j) \sigma(x_k, dx_k/dt) \right] f'_k(x_k) / C_k - |x_k| f'_k(x_k) / (R_k C_k) \\ &\leq \left[T_{kk} |f_k(x_k)| + \sum_{j \neq k} |T_{kj}| |f_j(x_j)| \right] f'_k(x_k) / C_k - |x_k| f'_k(x_k) / (R_k C_k) \\ &\leq [R_k \mu_\infty(T) - 1/M_k] f'_k(x_k) |f_k(x_k)| / (R_k C_k). \end{aligned}$$

设

$$D = \min_{1 \leq j \leq n} \inf_{|f_j(z)| \leq M\delta/(1-a)} f'_j(z) > 0, \quad (18)$$

$$\beta = \min(a, D \min_{1 \leq i \leq n} (1/M_i - R_i \mu_\infty(T))) > 0, \quad (19)$$

则由上述不等式可得

$$D^+ V_3(x) \leq -[D(1/M_k - R_k \mu_\infty(T))/\tau] V_3(x) \leq -(\beta/\tau) V_3(x), \quad \forall x \in \Omega_{\delta, a}. \quad (20)$$

由不等式 (20), 并利用比较原理, 就得到

$$V_3(x(t; t_0, x_0)) \leq V_3(x_0) \exp(-\beta(t-t_0)/\tau), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in \Omega_{\delta, a}. \quad (21)$$

因此, $\Omega_{\delta,a}$ 也是一个正向不变的有界闭子集.

令

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} M_i = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_z g'_i(z) < +\infty. \quad (22)$$

注意到 $DV_2(x) \leq V_3(x) \leq MV_2(x)$ ($x \in \Omega_{\delta,a}$), 则由不等式 (21), 可得

$$|x(t; t_0, x_0)|_\infty \leq (M/D)|x_0|_\infty \exp(-\beta(t-t_0)/\tau), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in \Omega_{\delta,a}. \quad (23)$$

以下分两种情形对系统 (13) 的轨道 $x(t; x_0)$ 的指数收敛行为进行讨论.

情形 1. $x_0 \notin \Omega_{\delta,a}$.

在此情形下, 由于 $B_{\delta,a} \subset \Omega_{\delta,a}$, 知 $x_0 \notin B_{\delta,a}$, 故存在有限时刻 $t^*(x_0, a)$, 使得 $x^* = x(t^*(x_0, a); x_0) \in B_{\delta,a}$, 且由不等式 (17) 得

$$|x^*|_\infty \leq |x_0|_\infty \exp(-at^*(x_0, a)/\tau). \quad (24)$$

设 $x = x(t; t^*(x_0, a), x^*)$ 是系统 (13) 在初始条件 $x(t^*(x_0, a); t^*(x_0, a), x^*) = x^*$ 下的解. 由于 $x^* \in B_{\delta,a} \subset \Omega_{\delta,a}$, 故由不等式 (23) 可得

$$|x(t; t^*(x_0, a), x^*)|_\infty \leq (M/D)|x^*|_\infty \exp(-\beta(t-t^*(x_0, a))/\tau), \quad \forall t \geq t^*(x_0, a). \quad (25)$$

因 $x(t; x_0) = x(t; t^*(x_0, a), x^*)$ ($t \geq t^*(x_0, a)$), 从而由 (19), (24) 和 (25) 式得

$$|x(t; x_0)|_\infty \leq (M/D)|x_0|_\infty \exp(-\beta t/\tau), \quad \forall t \geq t^*(x_0, a). \quad (26)$$

注意到 $M \geq D$ 和 β 的定义 (19) 式, 结合不等式 (17) 和 (26), 可得

$$|x(t; x_0)|_\infty \leq (M/D)|x_0|_\infty \exp(-\beta t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \notin \Omega_{\delta,a}.$$

情形 2. $x_0 \in \Omega_{\delta,a}$.

直接令不等式 (23) 中 $t_0 = 0$, 并注意到 $x(t; x_0) = x(t; 0, x_0)$ ($t \geq 0$) 即知上述不等式对于 $x_0 \in \Omega_{\delta,a}$ 和 $t \geq 0$ 也成立. 因此得

$$|x(t; x_0)|_\infty \leq (M/D)|x_0|_\infty \exp(-\beta t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (27)$$

令 $\alpha = M/D \geq 1$. 因 $|x|_\infty \leq \|x\| \leq n^{1/2}|x|_\infty$ ($x \in \mathbb{R}^n$), 则由不等式 (27) 得

$$\|x(t; x_0)\| \leq \alpha n^{1/2}\|x_0\| \exp(-\beta t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

从而, 不等式 (15) 成立. 证毕.

$\mu_\infty(T) < h$ 是 $\mu_1(T) < h$ 的“对偶”条件, 在 T 对称时两者合一, 故此时不等式 (12) 和 (15) 均成立. 作些另外的假定, 可得下述类似结果.

定理 5 假定系统 (1) 满足 $I_i = 0$, $g_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 全相同, 且为奇函数. 若 $\mu_\infty(T) < h$, 则系统运动轨道 $u(t; u_0)$ 满足

$$\|u(t; u_0)\| \leq n^{1/2}\|u_0\| \exp(-\eta_\infty t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (28)$$

其中 $\eta_\infty = \min_{1 \leq i \leq n} [1 - R_i M_i \mu_\infty(T)^+] > 0$, $\mu_\infty(T)^+ = \max(0, \mu_\infty(T))$.

证 作 Lyapunov 函数 $V_2(u) = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i| = |u_k|$, 其中 $k = k(u) \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则 $|g_k(u_k)| = \max_{1 \leq i \leq n} |g_i(u_i)|$. 求 Dini 导数, 得

$$D^+ V_2(u) = \left[\sum_{j=1}^n T_{kj} g_j(u_j) - u_k / R_k \right] \sigma(u_k, du_k/dt) / C_k$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{j=1}^n T_{kj} g_j(u_j) \sigma(u_k, du_k/dt) \right] / C_k - |u_k| / (R_k C_k) \\
&\leq \left[T_{kk} |g_k(u_k)| + \sum_{j \neq k} |T_{kj}| |g_j(u_j)| \right] / C_k - |u_k| / (R_k C_k) \\
&\leq \mu_\infty(T) |g_k(u_k)| / C_k - |u_k| / (R_k C_k) \\
&\leq [\mu_\infty(T)^+ R_k M_k - 1] |u_k| / (R_k C_k) \leq -(\eta_\infty/\tau) V_2(u).
\end{aligned}$$

由上述不等式, 并利用比较原理可得 $V_2(u(t; u_0)) \leq V_2(u_0) \exp(-\eta_\infty t/\tau)$ ($t \geq 0$). 再注意到 $n^{-1/2} \|u\| \leq V_2(u) \leq \|u\|$ ($u \in \mathbb{R}^n$), 即知不等式 (28) 成立. 证毕.

定理 6 若 $\mu_2(T) < h$, 则对于任意的网络外部输入 I_i ($i=1, 2, \dots, n$), 系统 (1) 存在唯一的平衡点 u^* , 且存在与电容常数 C_i ($i=1, 2, \dots, n$) 无关的常数 $\xi \geq 1$, 使得系统运动轨道 $u(t; u_0)$ 满足

$$\|u(t; u_0) - u^*\| \leq (C_{\max}/C_{\min}) n \xi \|u_0 - u^*\| \exp[-\eta_2 t/(2\tau)], \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (29)$$

其中 $\eta_2 = \min_{1 \leq i \leq n} [1 - R_i M_i \mu_2(T)^+] > 0$, $\mu_2(T)^+ = \max(0, \mu_2(T))$.

证 作 Lyapunov 函数 $V_4(x) = \sum_{i=1}^n C_i \int_0^{x_i} f_i(z) dz$. 求导, 得

$$\begin{aligned}
dV_4(x)/dt &= \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \left[\sum_{j=1}^n T_{ij} f_j(x_j) - x_i / R_i \right] \\
&\leq \mu_2(T) \sum_{i=1}^n \left[f_i(x_i) \right]^2 - \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_i) / R_i \leq \mu_2(T)^+ \sum_{i=1}^n M_i x_i f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_i) / R_i.
\end{aligned}$$

易知, $V_4(x) \leq \sum_{i=1}^n C_i x_i f_i(x_i)$, 故得 $dV_4(x)/dt \leq -(\eta_2/\tau) V_4(u)$, 从而得

$$V_4(x(t; x_0)) \leq V_4(x_0) \exp(-\eta_2 t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (30)$$

易知 $f_i(z)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 满足 $|f_i(z)| \leq 2m$, $|f_i(z)| \leq M|z|$ ($z \in \mathbb{R}^1$), 故得

$$V_4(x) \leq 2m C_{\max} n^{1/2} \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (31)$$

$$V_4(x) \leq (1/2) M C_{\max} \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (32)$$

令 $d = \min_{1 \leq i \leq n} \inf_{|z| \leq 1} f'_i(z) > 0$. 若 $\|x\| \leq 1$, 则 $|x_i| \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, n$), 从而得

$$\|x\| \leq 1 \Rightarrow V_4(x) \geq (d/2) C_{\min} \|x\|^2. \quad (33)$$

若 $\|x\| \geq 1$, 则 $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \geq n^{-1/2}$, 其中 $k=k(x) \in \{1, 2, \dots, n\}$. 令

$$\Lambda = \min \left(n^{1/2} \int_0^{n^{-1/2}} f_k(z) dz, n^{1/2} \int_0^{-n^{-1/2}} f_k(z) dz \right) > 0,$$

则由积分中值定理和 $f_k(z)$ 的单增性, 可得 $|z| \geq n^{-1/2} \Rightarrow |f_k(z)| \geq \Lambda$.

若 $x_k > 0$, 则 $\int_0^{x_k} f_k(z) dz = \int_0^{n^{-1/2}} f_k(z) dz + \int_{n^{-1/2}}^{x_k} f_k(z) dz \geq n^{-1/2} \Lambda + (x_k - n^{-1/2}) \Lambda = \Lambda x_k$. 若 $x_k < 0$,

则类似可得 $\int_0^{x_k} f_k(z) dz \geq -\Lambda x_k$. 从而, $\int_0^{x_k} f_k(z) dz \geq \Lambda |x_k| \geq n^{-1/2} \Lambda \|x\|$, 故得

$$\|x\| \geq 1 \Rightarrow V_4(x) \geq n^{-1/2} \Lambda C_{\min} \|x\|. \quad (34)$$

若 $\|x(t; x_0)\| \leq 1$, 则由不等式 (30), (32) 和 (33) 得

$$\|x(t; x_0)\| \leq (C_{\max}/C_{\min})^{1/2} (M/d)^{1/2} \|x_0\| \exp[-\eta_2 t/(2\tau)].$$

若 $\|x(t; x_0)\| \geq 1$, 则由不等式 (30), (31) 和 (34) 得

$$\|x(t; x_0)\| \leq (C_{\max}/C_{\min}) (2mn/\Lambda) \|x_0\| \exp(-\eta_2 t/\tau).$$

令 $\xi = \max(2m/\Lambda, (M/d)^{1/2}) \geq 1$. 综合上述两不等式, 就得到

$$\|x(t; x_0)\| \leq (C_{\max}/C_{\min}) n \xi \|x_0\| \exp[-\eta_2 t/(2\tau)], \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

从而, 不等式 (29) 成立. 定理证毕.

由定理 3, 4 和 6 可知定理 1 成立. 在定理 2、推论 1 或推论 2 的条件下也可类似地估计出或直接利用上述估计结果而得出网络的全局指数收敛速度, 不再赘述.

从定理 3, 4 和 6 知, 网络时间常数与全局指数收敛速度之间有着内在关系.

网络时间常数 $\tau = \max_{1 \leq i \leq n} (R_i C_i) \leq R_{\max} C_{\max}$. 下面分析 $R_{\max}$ 和 $C_{\max}$ 变小对于网络平衡点以及网络全局指数稳定的阶的影响.

设 $R_{\max}$ 变小, 其它的网络参数不变. 由定理 3 ~ 6 可知网络全局指数稳定的阶增大. 但是, 电阻常数 $R_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的变化会导致网络平衡点在空间 $\mathbb{R}^n$ 中位置的变化.

设 $C_{\max}$ 变小, 其它的网络参数不变. 首先, 与电阻常数不同的是, 电容常数 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的变化不会改变网络平衡点在空间 $\mathbb{R}^n$ 中的位置. 其次, 在适当的限制下, $C_{\max}$ 变小也会增大网络全局指数稳定的阶. 设条件 $\mu_{\infty}(T) < h$ 成立, 由定理 4 可知 $C_{\max}$ 变小总会增大网络全局指数稳定的阶. 设条件 $\mu_1(T) < h$ 成立, 在 T 非对称时 (T 对称时, 可利用上述 $\mu_1(T) = \mu_{\infty}(T) < h$ 成立下的结论), 若不对电容常数 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的变小方式加上适当的限制, 则由不等式 (12) 得不到上述结论. 为说明这一点, 不妨设所有电阻常数 $R_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都相等, 则不等式 (12) 中含有电容常数的项是

$$\text{TERMS} = (C_{\max}/C_{\min}) \exp[-\eta_1 t/(R_{\max} C_{\max})]. \quad (35)$$

若 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 在变小时, $C_{\min}$ 反而以比 $[\eta_1/(R_{\max} C_{\max})]$ 更大的指数速度趋于 0, 则由 (35) 式可知 $C_{\max}$ 变小并不会增大网络全局指数稳定的阶. 在情形 $\mu_1(T) < h$ 下, 假定电容常数 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的变化保持为同阶的, 即存在常数 $\mu > 0$ 和 $v > 0$ 使得

$$\mu \leq C_i/C_j \leq v, \quad i, j=1, 2, \dots, n.$$

这样, $C_{\max}$ 变小总会增大网络全局指数稳定的阶.

设条件 $\mu_2(T) < h$ 成立, 则可对不等式 (29) 作与上述类似的讨论.

综合上述讨论, 网络时间常数 τ 变小一般会增大网络全局指数稳定的阶. 这些分析结果可用来设计具有任意全局指数稳定阶的最优化计算神经网络. 首先, 将全局指数稳定性的代数条件作为分段线性或非线性不等式约束应用到最优化计算神经网络的综合过程, 应用的可

能性以及方式则依赖于具体的最优化问题。其次,通过适当地减小电容常数使得所有电容常数 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的变化保持为同阶,特别地,保持所有电容常数均相等,则不仅不会改变最优化计算问题的解,且由于网络时间常数 τ 也变小,故可使得神经网络具有任意事先指定的全局指数稳定的阶。

参 考 文 献

- 1 Cohen M A, Grossberg S. Absolute stability of global pattern information and parallel memory storage by competitive neural networks. *IEEE Trans Syst Man Cybern*, 1983, 13(5): 815 ~ 826
- 2 Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 1984, 81: 3 088 ~ 3 092
- 3 Guez A, Protopopescu V, Barhen J. On the stability, storage capacity and design of nonlinear continuous neural networks. *IEEE Trans Syst Man Cybern*, 1988, 18(1): 80 ~ 87
- 4 Pineda F J. Dynamics and architecture for neural computation. *Journal of Complexity*, 1988, 4: 216 ~ 245
- 5 Michel A N, Farrell J A, Porod W. Qualitative analysis of neural networks. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1989, 36: 229 ~ 243
- 6 Hirsch M W. Convergent activation dynamics in continuous time networks. *Neural Networks*, 1989, 2: 331 ~ 349
- 7 Kelly D G. Stability in contractive nonlinear neural networks. *IEEE Trans Biomedical Engineering*, 1990, 37: 231 ~ 242
- 8 Matsuoka K. Stability conditions for nonlinear continuous neural networks with asymmetric connection weights. *Neural Networks*, 1992, 5: 495 ~ 499
- 9 Vidyasagar M. Location and stability of the high-gain equilibria of nonlinear neural networks. *IEEE Trans Neural Networks*, 1993, 4(4): 660 ~ 672
- 10 廖晓昕. Hopfield 型神经网络的稳定性. *中国科学, A 辑*, 1993, 23(10): 1 025 ~ 1 035
- 11 Sudharsanan S I, Sundareshan M K. Exponential stability and a systematic synthesis of a neural network for quadratic minimization. *Neural Networks*, 1991, 4: 599 ~ 613
- 12 Bouzerdoum A, Pattison T R. Neural network for quadratic optimization with bound constraints. *IEEE Trans Neural Networks*, 1993, 4: 293 ~ 303
- 13 Hahn W. *Stability of Motion*. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 60 ~ 160
- 14 Vidyasagar M. *Nonlinear Systems Analysis*. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1993. 142 ~ 143
- 15 Sugawara K, Harao M, Noguchi S. On the stability of equilibrium states of analogue neural networks. *Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers (in Japanese)*, 1983. J-66-A, 258 ~ 265
- 16 Matsuoka K. On absolute stability of neural networks. *Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers (in Japanese)*, 1991. J74-D-11, 536 ~ 542
- 17 Atiya A F. Learning on a general network. In: Anderson D A ed. *Neural Information Processing Systems*. New York: American Institute of Physics, 1988. 22 ~ 30
- 18 Hirsch M W. Convergence in neural networks. In: *Proc Int Joint Conf Neural Networks*, 1987, 2: 115 ~ 125
- 19 Salam F M A, Wang Y-W, Choi M-R. On the analysis of dynamic feedback neural nets. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1991, 38: 196 ~ 201
- 20 Michel A N, Miller R K. *Qualitative Analysis of Large-Scale Dynamical Systems*. New York: Academic Press, 1977. 56 ~ 58